Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах

А.Н.Ляпунов*

Аннотация

Результаты статьи носят промежуточный характер между теорией оптимизации и теорией игр. Вводится новое понятие одноточечного решения для задач многокритериальной оптимизации, использующие теоретико-игровые принципы согласованности и равновесия. Выводятся уравнения для этого решения и устанавливаются условия, при которых это решение оптимально по Парето. Устанавливается также, что это решение обладает свойством ковариантности относительно преобразований множества задания критериев. Изложение сопровождается примерами.

1 Введение

Общепризнано, что любое решение многокритериальной задачи должно быть оптимальным по Парето (эффективным). Это значит, что улучшение такого решения по одному из критериев сопровождается его ухудшением по какому-либо дркгому критерию. Систематическое исследование Парето-оптимальных решений многокритериальных задач и методы их нахождения содержатся в монографии [1]. Одним из таких методов нахождения решения является свертывание критериев, в частности, максимизация неотрицательной линейной комбинации критериев. Этот подход содержится также в [3, 6]. Другой подход к многокритериальным задачам состоит в ранжировании критериев. Этому подходу посвящена монография [2], а также работы [4, 5].

В статьях [7, 8, 9] предложено понятие решения многокритериальной задачи, основанное на теоретико-игровых принципах оптимальности: согласованности и равновесии. Настоящая статья носит промежуточный характер между теорией оптимизации и теорией игр. В статье предлагается обобщение понятия решения, введенного в [7, 8, 9] и исследуются его свойства, в частности, устанавливается, что это решение ковариантно относительно преобразования области задания критериев. Принцип согласованности давно используется в математике — достаточно вспомнить согласованную систему мер в теории вероятностей. Принцип согласованности состоит в

*СПбЭМИ РАН

следующем: задача погружается в класс задач, зависящих от параметра, после чего постулируется вид зависимости решения от этого параметра. На этом принципе основано динамическое программирование, а также многие принципы оптимальности в кооперативных играх. В нашем случае (п. 2.1) принцип согласованности сводится к непрерывной зависимости решения для отрезка от угла поворота.

Принцип равновесия (лучше было бы говорить об устойчивости) состоит в следующем. Определяется класс возможных отклонений от решения. Решение удовлетворяет принципу равновесия, если при любом возможном отклонении нарушается принцип согласованности. В нашем случае (п.3.1) принцип равновесия сводится к тому. что принцип согласованности должен выполняться по каждой из переменных.

Прослеживается аналогия с классической оптимизацией: подобно тому, как равенство нулю производной функции еще не достаточно для ее экстемума, решение выведенных в п. 3.2 и 4.1 уравнений может быть не оптимальным по Парето. Поэтому в пп. 3.5 и 4.5 приводятся условия оптимальности решения по Парето.

В параграфе 3 из условия согласованности выводятся уравнения для многокритериальной задачи с одной переменной, устанавливаются условия оптимальности решения в смысле Парето и доказывается, что решение обладает свойством ковариантности относительно преобразования области задания критериев.

В параграфе 4 принцип равновесия используется для вывода уравнений для случая нескольких переменных из уравнений для задачи с одной переменной, устанавливаются условия оптимальности решения в смысле Парето и доказывается, что решение обладает свойством ковариантности относительно преобразования области задания критериев. Изложение сопровождается примерами.

2 Предварительные сведения

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ будем писать $x \geq y$, если $x_j \geq y_j$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — множество.

Определение. Точка $x \in X$ называется *оптимальной по Парето* или *Парето-оптимальной* или *эффективной* во множестве X, если не существует такой точки $y \in X$, что $y \geq x$, $y \neq x$. Множество Парето-оптимальных точек множества X будем обозначать через $\mathcal{E}(X)$. Если все точки множества X Парето-оптимальны, то будем говорить, что множество X *Парето-оптимально.*

Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$, где $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ — набор критериев. Совокупность $\mathcal{P} = (X, f)$ будем называть *многокритериальной задачей* или просто *задачей.*

Определение. Точка $x \in X$ называется *Парето-оптимальной* или *эффективной* для задачи $\mathcal{P}$, если не существует такой точки $y \in X$, что

$f(y) \geq f(x)$, $f(y) \neq f(x)$. Множество Парето-оптимальных точек в задаче $\mathcal{P}$ будем обозначать через $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \mathcal{E}(X, f)$.

Очевидно, $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X, f)$, где $f(x) = x$.

Определение. *Решением* задачи $\mathcal{P}$ называется отображение s, которое каждой задаче $\mathcal{P}$ из некоторого класса задач ставит в соответствие точку $s = s(\mathcal{P}) \in X$, при этом вектор $v = f(s)$ называется *вектором значений задачи* $\mathcal{P}$ или просто *значением задачи* $\mathcal{P}$.

Решение должно быть Парето-оптимальным, т.е. должна выполняться аксиома:

A1. $s(\mathcal{P}) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})$.

Можно требовать выполнения более сильной аксиомы, состоящей в том, что решение должно зависеть только от Парето-оптимального множества задачи. Точнее, пусть дана задача $\mathcal{P} = (X, f)$. Рассмотрим задачу $\hat{\mathcal{P}} = (\mathcal{E}(\mathcal{P}), \hat{f})$, где $\hat{f}$ — сужение функции f на множество $\mathcal{E}(\mathcal{P})$. Очевидно, $\mathcal{E}(\hat{\mathcal{P}}) = \mathcal{E}(\mathcal{P})$. Тогда аксиома состоит в следующем:

A2. $s(\mathcal{P}) = s(\hat{\mathcal{P}})$.

Статья посвящена последовательному построению решения с использованием принципа согласованности сначала для отрезка, затем для ломаной и, наконец, для произвольной кривой. Тем самым построено решение для задач с одной переменной. Далее, используя принцип равновесия, это решение распространяется на случай функций от многих переменных.

3 Случай одной переменной (решение для кривой)

3.1 Решение для отрезка

Определим решение для линейной задачи от одной переменной. Геометрически это означает, что мы определяем решение для отрезка.

Определение. *Отрезком* $[a, b]$ в $\mathbb{R}^m$ называется множество $[a, b] = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = a(1-\lambda) + b\lambda,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$, где $a, b \in \mathbb{R}^m$.

Пусть $n = 1$, $X = [0, 1]$, $f(x) = a(1-x) + bx$, где $a, b \in \mathbb{R}^m$ — заданные векторы. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{P} = ([0, 1],\ a(1-x) + bx). \tag{1}$$

Для $y \in \mathbb{R}^m$ через y^+ будем обозначать вектор, полученный из вектора y заменой отрицательных компонент нулями и введем функцию

$$\varphi_0(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\|y^+\|}{\|y\|}, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная фиксированная норма в $\mathbb{R}^m$.

В норме l_2 функция φ_0 равна косинусу угла между вектором y и положительным ортантом.

Наряду с функцией (2) будем рассматривать также функцию

$$\varphi_1(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(1+\varphi_0(y)-\varphi_0(-y)) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\|y^+\|}{\|y\|}-\frac{\|(-y)^+\|}{\|y\|}\right). \qquad (3)$$

Лемма 3.1 .$\varphi_0(y^1) \le \varphi_0(y^2) \Leftrightarrow \varphi_1(y^1) \le \varphi_1(y^2)$.

Доказательство.Пусть $\varphi_0(y^1) \le \varphi_0(y^2)$ и пусть в определении (2) взята норма в l_p. Тогда $\varphi_0^p(y)+\varphi_0^p(-y)=1$. Следовательно, $\varphi_0(-y^1) \ge \varphi_0(-y^2)$. Лемма следует из определения (3) функции φ_1.$\square$

Введем в рассмотрение функцию $\varphi : \mathbb{R}^m \to [0,1]$, обладающую следующими свойствами:

F1. Функция φ определена и непрерывна для всех $y \in \mathbb{R}^m$, $y \ne 0$.

F2. $0 \le \varphi(y) \le 1$ для всех $y \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(y)=1$ для $y \in \mathbb{R}^m_+$, $\varphi(y)=0$ для $y \in \mathbb{R}^m_-$.

F3. Для любой перестановки ρ чисел $\{1,\ldots,m\}$ $\varphi(\rho y)=\varphi(y)$, где ρy — вектор, полученный из вектора y перестановкой ρ его компонент.

F4. Для $\lambda > 0 \quad \varphi(\lambda y)=\varphi(y)$.

F5. $\varphi(y^1) < \varphi(y^2) \Leftrightarrow \varphi_0(y^1) < \varphi_0(y^2)$, где φ_0 — функция (2) для некоторой нормы.

F6. $\varphi(y)+\varphi(-y)=1$.

Определение. Функцию φ, обладающую свойствами F1 — F5, будем называть *функцией решения* или *решающей функцией*. Если, кроме того, функция φ обладает еще и свойством F6, то будем называть ее *симметричной решающей функцией*.

Примеры решающих функций. 1.Функции (2) и (3) являются решающими функциями, причем функция (3) еще и симметрична.

2. В норме l_p функция $\varphi_p(y)=\varphi_0^p(y)$ будет симметричной решающей функцией.

3. Если φ — решающая функция, то функция

$$\hat{\varphi}(y) = \frac{1}{2}(1+\varphi(y)-\varphi(-y)) \qquad (4)$$

будет симметричной решающей функцией.

4. Если $\psi : [0,1] \to [0,1]$ непрерывное возрастающее отображение, причем $\psi(0)=0$, $\psi(1)=1$, а φ — решающая функция, то $\psi\varphi$ также решающая функция.

Определение. Будем говорить, что решение $s=s(a,b)$ для задачи (1) или, что то же самое, для отрезка $[a,b]$, удовлетворяет *аксиоме согласованности*, если оно определено формулой

A3 (Аксиома согласованности)

$$s(a,b) = a + \varphi(b-a)(b-a), \qquad (5)$$

где φ — произвольная фиксированная решающая функция.

Определение. Если для всех $a,b \in \mathbb{R}^m$ $s(a,b)=s(b,a)$, то решение s называется *симметричным*.

Отметим следующие свойства решения (5):

S1. Функция s непрерывна на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

S2. $s(a,b) \in [a,b]$.

S3. Если $a \geq b$, то $s(a,b) = a$, если $a \leq b$, то $s(a,b) = b$.

S4. $\|s(a,b) - a\| = \varphi(b-a)\,\|b-a\|$.

S5. Решение $s(a,b)$ Парето-оптимально для всех $a, b \in \mathbb{R}^m$.

S6. Если решающая функция φ симметрична, то решение s также симметрично.

Пример. Пусть в задаче (1) $m = 2$, $a = 0$, $b = (b_1, b_2)$, причем $b_1 \geq 0$, $b_2 \leq 0$, $\|b\| = 1$. Пусть вектор b вращается по часовой стрелке, находясь в четвертом квадранте и сохраняя норму. Найдем траекторию решения $s = s(b)$, считая, что в качестве решающей функции взята функция (2). Ввиду условий, наложенных на вектор b, $\varphi_0(b) = b_1$. Поэтому $s = b_1 b$, или

$$s_1 = b_1^2, \quad s_2 = b_1 b_2, \quad \|b\| = 1. \tag{6}$$

В норме l_1 $\|b\| = b_1 - b_2$, и из уравнения (6) следует, что в четвертом квадранте точка $s = s(b)$ описывает часть параболы с уравнением

$$s_2 = s_1 - \sqrt{s_1}, \quad 0 \leq s_1 \leq 1$$

.

В норме l_2 $\|b\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ и из уравнения (6) следует, что точка $s = s(b)$ описывает часть окружности с уравнением

$$s_1^2 + s_2^2 - s_1 = 0, \quad 0 \leq s_1 \leq 1.$$

3.2 Решение для кривой

Пусть $X = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ — промежуток, $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ — набор критериев. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{P} = ([\alpha, \beta],\, f). \tag{7}$$

С задачей (7) свяжем кривую L:

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x),\, \alpha \leq x \leq \beta\}. \tag{8}$$

Пусть $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$. Через $L(\alpha', \beta')$ будем обозначать часть кривой (8), соответствующую этому промежутку, т.е.

$$L(\alpha', \beta') \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x),\, \alpha' \leq x \leq \beta'\}. \tag{9}$$

Через $l(\alpha', \beta')$ будем обозначать длину кривой $L(\alpha', \beta')$. Известно, что

$$l(\alpha', \beta') = \int_{\alpha'}^{\beta'} \|f'(x)\|\, dx. \tag{10}$$

Пусть $s(\alpha', \beta') = f(x^*)$, $\alpha \leq x^* \leq \beta'$ — решение для кривой (9). Потребуем, чтобы решение удовлетворяло следующей аксиоме:

A4 (Аксиома аддитивности). *Для любых $\alpha \le \alpha' \le \gamma \le \beta' \le \beta$ должно выполняться равенство*

$$l(\alpha', s(\alpha', \beta')) = l(\alpha', s(\alpha', \gamma)) + l(\gamma, s(\gamma, \beta')). \tag{11}$$

Замечания. 1. Равенство (11) означает аддитивность длины кривой от начала до решения.

2. Для отрезка равенство (11) выполняется, если решение удовлетворяет аксиоме согласованности, т.е. построено по формуле (5), ввиду свойства F4 решающей функции и свойства S4 решения.

Пусть $x_0 = \alpha \le x_1 \le \ldots \le x_k = \beta$ — разбиение промежутка $[\alpha, \beta]$, и пусть L^k — ломаная, вписанная в кривую L в соответствии с этим разбиением, т.е.

$$L^k \stackrel{\text{def}}{=} [f(x_0), f(x_1)] \cup \ldots \cup [f(x_{k-1}), f(x_k)]$$

Пусть φ — фиксированная решающая функция и s — решение для отрезка, определенное формулой (5). Из аксиомы аддитивности следует, что если s^k — решение для ломаной L^k, а $l^k(s^k)$ — длина участка ломаной L^k от $f(\alpha)$ до s^k, то выполнено равенство

$$l^k(s^k) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(f(x_i) - f(x_{i-1})) \left\| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right\|. \tag{12}$$

Пусть s — решение для кривой (8), $l(s)$ — длина участка кривой L от $f(\alpha)$ до s, а точка $x^* \in [\alpha, \beta]$ определена условием $s = f(x^*)$. Переходя к пределу в (12) и учитывая (10), получаем формулу для определения x^*;

$$\int_{\alpha}^{x*} \|f'(x)\| \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(f'(x)) \|f'(x)\| \, dx, \tag{13}$$

где f' — производная функции f.

Из свойства F2 функции φ следует, что $\alpha \le x^* \le \beta$.

Заметим, что если $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ — функция (2), то решение (13) превращается в решение, введенное в [7, 8, 9].

Пример. Рассмотрим задачу (7), в которой $m = 2$, $\alpha = 0$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x)$, $f(0) = (0, c)$. Будем предполагать, что $f_1'(x) > 0$, $f_2'(x) < 0$. Очевидно, все точки этой кривой Парето-оптимальны. Пусть $\varphi = \varphi_0$ — функция (2). Уравнение (13) в норме l_1 Дает

$$f_1(x^*) - f_2(x^*) = f_1(\beta) - c, \tag{14}$$

а в норме l_2 дает

$$\int_0^{x^*} \sqrt{(f_1'(x))^2 + (f_2'(x))^2} \, dx = f_1(\beta). \tag{15}$$

Пусть $f_1(x) = x$, $f_2(x) = c - \frac{1}{2}x^2$. Из уравнения (14) получаем $x^* = \sqrt{\beta + 1} - 1$, а из уравнения (15) получаем следующее уравнение для x^*:

$$\frac{1}{2}\left(x^* \sqrt{1 + (x^*)^2} + \ln(x^* + \sqrt{1 + (x^*)^2})\right) = \beta$$

.

3.3 Функция Ляпунова

Пусть дана задача (7) и $s = (x^*, f(x^*))$ — ее решение, определяемое формулой (13), где φ — некоторая фиксированная решающая функция. Введем функцию

$$F(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_\alpha^x (x-t)\,\|f'(t)\|\;dt - (x-\alpha)\int_\alpha^\beta \varphi(f'(t))\,\|f'(t)\|\;dt. \qquad (16)$$

Легко видеть, что уравнение $F'(x^*) = 0$ есть уравнение (13). Кроме того, $F''(x) = \|f'(x)\| > 0$. Таким образом, функция (16) строго выпукла и достигает минимума в точке x^*, т.е. является функцией Ляпунова [10] для задачи (7).

Пример. Для задачи (1) (т.е. для отрезка $[a, b]$) из (16) следует, что функция Ляпунова имеет вид

$$F(x) = \|b-a\|\left(\frac{x^2}{2} - \varphi(b-a)x\right).$$

3.4 Свойство ковариантности решения

Теорема 3.1 *.Пусть $\omega : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$ — строго возрастающее отображение, причем $\omega(\gamma) = \alpha$, $\omega(\delta) = \beta$, а функция $g : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ определена равенством $g(y) = f(\omega(y))$, где $y \in [\gamma, \delta]$. Рассмотрим две задачи: $\mathcal{P}_1 = ([\alpha, \beta], f)$ и $\mathcal{P}_2 = ([\gamma, \delta], g)$. Пусть $x^* = s(\mathcal{P}_1)$ и $y^* = s(\mathcal{P}_2)$ — решения этих задач. Тогда эти решения связаны соотношением $x^* = \omega(y^*)$.*

Доказательство. Решение y^*, согласно (13), определяется из уравнения

$$\int_\gamma^{y*} \|g'(y)\|\,dy = \int_\gamma^\delta \varphi(g'(y))\|g'(y)\|\,dy.$$

Теорема следует из правила замены переменной под интегралом. Полагая $y = \omega(x)$, имеем

$$\int_\gamma^{y^*} \|g'(y)\|\,dy = \int_\alpha^{x^*} \|f'(x)\|\,dx,$$

$$\int_\gamma^\delta \varphi(g'(y))\|g'(y)\|\,dy = \int_\alpha^\beta \varphi(f'(x))\|f'(x)\|\,dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\omega'(y) > 0$ и $\varphi(\lambda x) = \varphi(x)$ для $\lambda > 0$.□

3.5 Условия Парето-оптимальности решения

Рассмотрим задачу (7). Будем предполагать, что все функции f_i, $i = 1, \ldots, m$, строго вогнуты на $[\alpha, \beta]$. Пусть, далее, точки x_i определены условием

$$f_i(x_i) = \max_{x \in [\alpha, \beta]} f_i(x). \qquad (17)$$

Не умаляя общности можно считать, что функции f_i перенумерованы так, что выполнено условие:

$$\alpha \leq x_1 \leq \ldots \leq x_m \leq \beta. \tag{18}$$

Утверждение 3.1 $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = [x_1, x_m]$.

Доказательство. На интервале $[x_1, x_m]$ функция f_1 убывает, а функция f_m возрастает. Поэтому векторы $f(x')$ и $f(x'')$ не сравнимы ни для каких $x', x'' \in [\alpha, \beta]$. В то же время, если $x' \in [\alpha, x_1)$, то $f(x') < f(x_1)$, и, значит, $f(x') \notin \mathcal{E}(\mathcal{P})$. Аналогично, если $x' \in (x_m, \beta]$, то $f(x') \notin \mathcal{E}(\mathcal{P})$.$\Box$

Теорема 3.2 . *Если функции f_i, $i = 1, \ldots, m$ строго вогнуты, то решение x^*, определяемое формулой (13), удовлетворяет аксиоме A2.*

Доказательство. Из строгой вогнутости функций f_i, $i = 1, \ldots, m$ и неравенств (18) следует, что $f'(x) > 0$ для $x \in [\alpha, x_1)$ и $f'(x) < 0$ для $x \in (x_m, \beta]$. Поэтому из свойства F2 решающей функции следует, что $\varphi(f'(x)) = 1$ для $x \in [\alpha, x_1)$ и $\varphi(f'(x)) = 0$ для $x \in (x_m, \beta]$. Поэтому уравнение (13) сводится к уравнению

$$\int_{x_1}^{x*} \|f'(x)\| \, dx = \int_{x_1}^{x_m} \varphi(f'(x)) \|f'(x)\| \, dx.$$

Теорема следует из утверждения 3.1.$\Box$

4 Общий случай

4.1 Основное уравнение

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый телесный компакт, $f : X \to \mathbb{R}^m$ — набор критериев, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Будем рассматривать задачу $\mathcal{P} = (X, f)$.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ будем писать $x = (x_j, x_{-j})$, где x_j — j-я компонента x, а x_{-j} — совокупность остальных координат. Для $x \in X$ положим

$$\begin{aligned} a_j(x_{-j}) &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{x_j \mid (x_j, x_{-j}) \in X\}, \\ b_j(x_{-j}) &\stackrel{\text{def}}{=} \max\{x_j \mid (x_j, x_{-j}) \in X\} \end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что ввиду сделанных предположений относительно множества X функции (19) непрерывны, причем $a_j(x_{-j}) < b_j(x_{-j})$ для почти всех $x \in X$.

Возьмем произвольную точку $\hat{x} \in X$, выберем j и зафиксируем $\hat{x}_{-j}$. Рассмотрим задачу с одной переменной

$$\mathcal{P}_j(\hat{x}_{-j}) = ([a_j(\hat{x}_{-j}), \, b_j(\hat{x}_{-j})], \, f(\cdot, \, \hat{x}_{-j})). \tag{20}$$

Потребуем, чтобы решение задачи $\mathcal{P}$ удовлетворяло следующей аксирме:

A5 (Аксиома равновесия) Точка $x^* = s(\mathcal{P})$ есть *решение* задачи $\mathcal{P}$, если для всех $j = 1, \ldots, n$ $\;x_j^* = s(\mathcal{P}_j(x_{-j}^*))$, т. е. x_j^* есть решение задачи (20), удовлетворяющее аксиомам A3 и A4.

Из формулы (13) и аксиом A3, A4, A5 получаем следующую систему для нахождения решения:

$$\begin{gathered}\int_{a_j(x^*_{-j})}^{x^*_j} \| \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_j,\, x^*_{-j}) \| \, dx_j = \\ = \int_{(a_j(x^*_{-j}))}^{b_j(x^*_{-j})} \varphi(\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x^*_{-j})) \| \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x^*_{-j}) \| \, dx_j, \quad j = 1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{21}$$

4.2 Теорема существования

Теорема 4.1 *.Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, а функции f непрерывно дифференцируемы. Тогда система (21) имеет решение $x^* \in X$.*

Докажем сначала следующую лемму. Для $x \in X$ положим

$$Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n \mid a_j(x_{-j}) \le y_j \le b_j(x_{-j})\}, \tag{22}$$

где $a_j(x_{-j})$ и $b_j(x_{-j})$ определены формулами (19).

Лемма 4.1 *. Пусть $F : X \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, причем $F(x) \in Q(x)$ для всех $x \in X$, где параллелепипед $Q(x)$ определен формулой (22). Тогда отображение F имеет в X неподвижную точку $x^* \in X$: $x^* = F(x^*)$.*

Доказательство. Пусть π — оператор проектирования на множество X. Введем отображение $G = \pi F$. Так как отображение $G : X \to X$ непрерывно, оно имеет неподвижную точку $x^* \in X$, $x^* = G(x^*)$. Для доказательства леммы достаточно показать, что $F(x^*) \in X$.

Предположим противное: $F(x^*) \notin X$. Тогда $c \stackrel{\text{def}}{=} F(x^*) - x^* \neq 0$. Рассмотрим гиперплоскость

$$cx = cx^*. \tag{23}$$

Точка x^* как проекция на X точки $F(x^*)$ является решением задачи

$$\|F(x^*) - x\|^2 \to \min \quad x \in X. \tag{24}$$

Известно, что гиперплоскость (23) является опорной к множеству X и отделяет его от точки $F(x^*)$. Поэтому выполнены неравенства

$$cF(x^*) > cx^* \tag{25}$$

и

$$cx \le cx^* \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{26}$$

Покажем, что неравенства (26) выполнены для всех $x \in Q(x^*)$. Так как x^* является решением задачи (24), выполнены неравенства

$$c(F(x^*) - x) \ge \|c\|^2 \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Из этих неравенств следует, что компоненты x^*_j, $j = 1, \ldots, n$, вектора x^* удовлетворяют условиям

$$x^*_j = \begin{cases} b_j(x^*_{-j}), & \text{если} \quad c_j > 0, \\ a_j(x^*_{-j}), & \text{если} \quad c_j < 0, \\ a_j(x^*_{-j} \le x_j \le b_j(x^*_{-j})), & \text{если} \quad c_j = 0. \end{cases}$$

Из этих неравенств следует, что для всех $x \in Q(x^*)$ выполнены неравенства (26) и, следовательно, $F(x^*) \notin Q(x^*)$, а это противоречит предположению.$\square$

Доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим отображение $F : X \to \mathbb{R}^n$, где $y = F(x)$ определяется из системы

$$\begin{aligned} &\int_{a_j(x_{-j})}^{y_j} \|\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_j,\, x_{-j})\|\, dx_j = \\ &= \int_{(a_j(x_{-j}))}^{b_j(x_{-j})} \varphi(\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x_{-j}))\|\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x_{-j})\|\, dx_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{27}$$

Очевидно, отображение F удовлетворяет условиям леммы 4.1 и, следовательно, имеет неподвижную точку x^*, которая является решением системы (21).$\square$

4.3 Задача с линейными критериями

Пусть $f(x) = \sum_{j=1}^n c^j x_j$, где $c^j = (c_{1j}, \ldots, c_{mj})$, $j = 1, \ldots, n$. Так как $\partial f/\partial x_j = c^j$, $j = 1, \ldots, n$, система (21) сводится к системе

$$x_j = a_j(x_{-j})(1 - \varphi(c^j)) + b_j(x_{-j})\varphi(c^j), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Если $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_j \le x_j \le \beta_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ — параллелепипед, то из (28) следует, что решение выражается в явном виде:

$$x_j = \alpha_j(1 - \varphi(c^j)) + \beta_j\varphi(c^j), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{29}$$

Если X — единичный куб, т.е. $\alpha_j = 0$, $\beta_j = 1$, $j = 1, \ldots, n$, то равенства (29) переходят в равенства $x_j = \varphi(c^j)$, $j = 1, \ldots, n$. Полагая в (5) $a = 0$, $b = c^j$, для значения задачи получаем выражение:

$$v = \sum_{j=1}^n c^j\varphi(c^j) = \sum_{j=1}^n s(c^j). \tag{30}$$

Равенство (30) означает, что значение задачи равно сумме значаний для составляющих ее векторов c^j, $j = 1, \ldots, n$.

4.4 Свойство ковариантности решения

Пусть $X = [a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j \le x_j \le b_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, $Y = [c, d]$ и $\omega_j : [c_j, d_j] \to [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ — возрастающие отображения, причем $\omega(c_j) = a_j$, $\omega(d_j) = b_j$. Определим отображение $\omega : [c, d] \to [a, b]$ формулой $\omega(y) = (\omega_1(y_1), \ldots, \omega_n(y_n))$, а функцию $g : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ — формулой $g(y) = f(\omega(y))$ и рассмотрим задачи: $\mathcal{P}_1 = ([a, b],\, f)$ и $\mathcal{P}_2 = ([c, d],\, g)$.

Теорема 4.2 .Свойство ковариантности решения. *Если $x^* = s(\mathcal{P}_1)$ и $y^* = s(\mathcal{P}_2)$ — решения соответственно задач $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, то эти решения связаны соотношением $x^* = \omega(y^*)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.$\square$

4.5 Условия Парето-оптимальности решения

В этом пункте будет показано, что если все критерии — вогнутые функции, то решение уравнений (21) Парето-оптимально и определяется только Парето-оптимальной частью задачи, т.е. удовлетворяет аксиоме A2.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m)$ — набор критериев. Будем предполагать, что f_i, $i = 1, \ldots, m$ — строго вогнутые функции. Пусть

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{R}^m_+ \mid \sum_{i=1}^m z_i = 1\}$$

— симплекс в $\mathbb{R}^m$.

Известно ([1]), что в случае вогнутых критериев для Парето-оптимальности точки $\hat{x} \in X$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого вектора $z \in Z$ точка $\hat{x}$ была бы решением задачи

$$\sum_{i=1}^m z_i f_i(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{31}$$

Из сделанных предположений следует, что задача (31) при любом $z \in Z$ имеет единственное решение $x = g(z)$, причем $g(z) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})$ при любом $z \in Z$. Положим

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^{m-1}_+ \mid \sum_{i=1}^{m-1} y_i \leq 1\}.$$

Между Z и Y существует соответствие $y \leftrightarrow z = (y_1, \ldots, y_{m-1}, 1 - \sum_{i=1}^{m-1} y_i)$. Таким образом можно считать, что функция g задана на Y. Положим теперь $h(y) = f(g(y))$, где $y \in Y$ и рассмотрим задачу $\hat{\mathcal{P}} = (Y, h)$. По построению $\mathcal{E}(\hat{\mathcal{P}}) = Y$, и, следовательно, решение этой задачи, полученное по формуле (21), будет Парето-оптимально.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}^n$,

$$f_i(x) = -\sum_{j=1}^n (x_j - d^i_j)^2, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Решая задачу (31), получаем

$$g(z) = \sum_{i=1}^m z_i d^i,$$

где $d^i = (d^i_1, \ldots, d^i_n) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$. Это значит, что $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \operatorname{conv}\{d^1, \ldots, d^m\}$.

Пусть $n = 2$, $m = 3$, $d^1 = (0, 0)$, $d^2 = (a, 0)$, $d^3 = (0, b)$, $a > 0$, $b > 0$, так что

$$f_1(x) = -x_1^2 - x_2^2,\ f_2(x) = -(x_1 - a)^2 - x_2^2,\ f_3(x) = -x_1^2 - (x_2 - b)^2.$$

Имеем:

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \mid \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} \leq 1\}.$$

Из (19) получаем:

$$a_1(x_2) = a_2(x_1) = 0,\ b_1(x_2) = a\left(1 - \frac{x_2}{b}\right),\ b_2(x_1) = b\left(1 - \frac{x_1}{a}\right).$$

Кроме того

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = (-x_1, -x_1 + a, -x_1), \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = (-x_2, -x_2, -x_2 + b),$$

В качестве решающей возьмем функцию (2) с нормой в l_1. Тогда уравнения (21) примут вид:

$$\int_0^{x_1}(a+t)\,dt = \int_0^{a\left(1-\frac{x_2}{b}\right)}(a-t)\,dt, \quad \int_0^{x_2}(b+t)\,dt = \int_0^{b\left(1-\frac{x_1}{a}\right)}(b-t)\,dt.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$x_1 = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}, \quad x_2 = \frac{b(\sqrt{3}-1)}{2}.$$

4.6 Примеры

Во всех приводимых ниже примерах в качестве решающей функции берется функция (2).

1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ — прямоугольник на плоскости с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$, на котором заданы два критерия:

$$f_1(x) = x_1 + x_2, \quad f_2(x) = -x_1 - x_2.$$

Возьмем норму в l_1. Так как $c^1 = c^2 = (1,-1)$, из (2) следует, что $\varphi(c^1) = \varphi(c^2) = 1/2$. Согласно (28) имеем

$$x_1 = \frac{1}{2}(a_1(x_2) + b_1(x_2)), \quad x_2 = \frac{1}{2}(a_2(x_1) + b_2(x_1)),$$

где $a_i(\cdot)$, $b_i(\cdot)$, $i = 1,2$ определены в (19).

Очевидно, этому условию удовлетворяют все точки отрезка с концами $(1,1)$, $(2,2)$. Обозначим этот отрезок через L. Мы получили новую задачу (L, f). Положим $y = x_1 + x_2$, где $x = (x_1, x_2) \in L$. Тогда $2 \le y \le 4$, $\hat{f}_1(y) = y$, $\hat{f}_2(y) = -y$. Решая задачу $([2,4], \hat{f})$ по формуле (28) (или по формуле (5) для отрезка $[(2,-2),(4,-4)]$) получаем $y = 3$, $v = (3,-3)$, $x_1 = x_2 = 3/2$.

2. Найдем решение для симплекса

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{d_j} \le 1\},$$

где $d_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Для этого положим $f_i(x) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, и рассмотрим задачу (X, f). Согласно (19), (2) имеем

$$a_j(x_{-j}) = 0,\ b_j(x_{-j}) = d_j\left(1 - \sum_{k \ne j} \frac{x_k}{d_k}\right),\ c^j = e^j,\ \varphi(c^j) = 1,\ j = 1, \ldots, n,$$

где e^j — j-й орт, $j = 1, \ldots, n$.

Из (28) следуют равенства $x_j = b_j(x_{-j})$, $j = 1, \ldots, n$, т. е. $x \in \mathcal{E}(X)$. Рассмотрим теперь задачу $(\hat{X}, \hat{f})$, где

$$\hat{X} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x_j}{d_j} \leq 1\},\ \hat{f}_i = x_i,\ i = 1, \ldots, n-1,\ \hat{f}_n(x) = d_n \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x_j}{d_j}\right).$$

Имеем

$$a_j(x_{-j}) = 0, \quad b_j(x_{-j}) = d_j \left(1 - \sum_{k \neq j,n} \frac{x_k}{d_k}\right).$$

Введем $n \times (n-1)$ матрицу

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\frac{d_n}{d_1} & -\frac{d_n}{d_2} & \ldots & -\frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$$

и вектор $D \stackrel{\text{def}}{=} (0, \ldots, 0, d_n) \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через c^j, $j = 1, \ldots, n-1$, j-й столбец матрицы C. Заметим, что из определения c^j, $j = 1, \ldots, n-1$, следует, что $0 < \varphi(c^j) < 1$. В этих обозначениях критерии запишутся в виде

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} c^j x_j + D.$$

Из системы (28) получаем

$$x_j = \varphi(c^j) d_j \left(1 - \sum_{k \neq j,n} \frac{x_k}{d_k}\right), \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Решая эту систему, находим

$$x_j = \frac{\varphi(c^j) d_j}{1 - \varphi(c^j)} A, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad x_n = 1 - A \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varphi(c^j) d_j}{1 - \varphi(c^j)},$$

где A определяется из условия

$$A \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varphi(c^j)}{1 - \varphi(c^j)}\right) = 1.$$

В норме l_1

$$\varphi(c^j) = \frac{d_j}{d_j + d_n}, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

и, следовательно,

$$x_j = \frac{d_j^2}{\sum_{k=1}^n d_k}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что величины x_j/d_j, $j = 1, \ldots, n$, являются оптимальными стратегиями в диагональной матричной игре $(1/d_j)$, $j = 1, \ldots, n$, ([11]).

В норме l_2

$$\varphi(c^j) = \frac{d_j}{\sqrt{d_j^2 + d_n^2}}, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

В этом случае решение имеет вид:

$$x_j = \frac{h_j}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} h_k}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad x_n = \frac{d_n}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} h_k},$$

где

$$h_j = \frac{d_j^2}{\sqrt{d_j^2 + d_n^2} - d_j}, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Мы видим, что в норме l_1 решение не зависит от того, какую из переменных x_j мы выражаем через остальные, а в норме l_2 зависит.

3. Найдем решение для части шара:

$$X = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n x_j^2 \le 1\}.$$

Аналогично примеру 2 приходим к задаче $\mathcal{P} = (X, f)$, где

$$f_i(x) = x_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)).$$

Имеем

$$a_j(x_{-j}) = 0, \quad b_j(x_{-j}) = \sqrt{1 - \sum_{k \ne j} x_k^2}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\frac{x_1}{f_{n+1}} & -\frac{x_2}{f_{n+1}(x)} & \ldots & -\frac{x_n}{f_{n+1}(x)} \end{pmatrix}.$$

В норме l_1 уравнения (21) сводятся к уравнениям:

$$\int_0^{x_j} \left(1 - \frac{\partial f_{n+1}(x)}{\partial x_j}\right) dx_j = \int_0^{b_j(x_{-j})} dx_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$x_j - f_n(x) + f_n(x \| x_j = 0) = b_j(x_{-j}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Так как $f_n(x \| x_j = 0) = b_j(x_{-j})$, окончательно получаем

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Для этого решения

$$f_1(x) = \ldots = f_n(x) = f_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

В норме l_2 уравнения (21) сводятся к уравнениям

$$\int_0^{x_j} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_{n+1}(x)}{\partial x_j}\right)^2} \, dx_j = \int_0^{b_j(x_{-j})} dx_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Так как

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_{n+1}(x)}{\partial x_j}\right)^2} = \frac{b_j(x_{-j})}{\sqrt{b_j^2(x_{-j}) - x_j^2}}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

получаем систему уравнений

$$\arcsin \frac{x_j}{b_j(x_{-j})} = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Решая эту систему, получаем

$$x_j = \frac{\mathrm{tg} 1}{\sqrt{1 + n \mathrm{tg}^2 1}}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$f_i(x) = x_i = \frac{\mathrm{tg} 1}{\sqrt{1 + n \mathrm{tg}^2 1}}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + n \mathrm{tg}^2 1}}.$$

4. Пусть X — Парето-оптимальная часть сферы, заданной параметрически:

$$X = \{x \in \mathbb{R}_+^3 \mid x_1 = \cos\alpha \cos\beta, \, x_2 = \cos\alpha \sin\beta, \, x_3 = \sin\alpha, \, 0 \le \alpha, \beta \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Уравнения (21) в норме l_1 принимают вид:

$$\int_0^{\alpha} (\sin\alpha'(\cos\beta + \sin\beta) + \cos\alpha') \, d\alpha' = \int_0^{\pi/2} \cos\alpha \, d\alpha,$$

$$\int_0^{\beta} \cos\alpha(\sin\beta' + \cos\beta') \, d\beta' = \int_0^{\pi/2} \cos\alpha \cos\beta \, d\beta.$$

Из второго уравнения следует, что $\sin\beta = \cos\beta = 1/\sqrt{2}$, т. е.

$$x_1 = x_2 = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Из первого уравнения получаем

$$\sin\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha = 1 - \sqrt{2}.$$

В норме l_2 система (21) сводтися к следующей системе:

$$\int_0^{\alpha} d\alpha' = \int_0^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha, \quad \int_0^{\beta} \cos\alpha\, d\beta = \int_0^{\pi/2} \cos\alpha \cos\beta\, d\beta.$$

Из этих уравнений находим $\alpha = \beta = 1$ и

$$x_1 = \cos^2 1, \quad x_2 = \sin 1 \cos 1, \quad x_3 = \sin 1.$$

5 Заключение

Отметим некоторые черты предлагаемого решения.

1. Как видно из формул (21), решение имеет интегральный характер, т. е. зависит от всего Парето-оптимального множества задачи.

2. Решение для множества существенно зависит от того. как это множество задано аналитически (ср. примеры 3 и 4 п. 4.6). В этом отличие предлагаемого решения от теоретико-игровых решений. Этот факт объясняется тем, что уравнения, задающие множество, выступают как критерии некоторой задачи.

3. Решение зависит от нормы и решающей функции.

Список литературы

[1] *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.//М.; Физматлит, 1982.

[2] *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход.//М.; Физматлит, 2002.

[3] *Kostreva M.M., Ogryczak W., Wierbicki A.* Equitable aggregations and multiple criteria analysis.// EJOR[1], N 158, 2004, pp. 362 — 377.

[4] *Angilella S., Greco S., Lamantia F., Matarazzo B.* Assessing nonaditive utility for multicriteria decision aid.// EJOR, N 158, 2004, pp. 734 — 744.

[5] *Doumpos M., Zopounidis C.* A multicriteria classification approach based on pairwise comparisons.//EJOR, N 158, 2004, pp. 378 — 389.

[1] European Journal of Operational Research.

[6] *Leskinen P., Kangas A.S., Kangas J.* Rank-based modelling of preference in multi-criteria decision making.//EJOR, N 158, 2004, pp. 721 — 733.

[7] *Ляпунов А.Н.* Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах.//Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, N 1, с. 163-164.

[8] *Ляпунов А.Н.* Равновесные решения в многокритериальных задачах.//Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12 N 4, с. 863 - 864.

[9] *Ляпунов А.Н.* Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах.//Экономико-математические исследования. Математические модели и информационные технологии.// IV, ч. I, с. 92 -110. 2005, СПб-ЭМИ РАН, СПб.

[10] *Liapunov A.M.* Problème géncéral de la stabilité du movement.//Ann. de la Faculté des science de l'Univ. de Toulouse, 2e série, 1907, t.IX, pp. 203 — 474.

[11] *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков.//М., Наука, 1985. 272 с.